確率数理工学5

● モーメント母関数と特性関数

Def (モーメント母関数)

$t \in \mathbb{R}$: パラメータ

X : r.v.

$$M(t) \overset{\text{def}}{=} E[e^{tX}]$$

→ モーメント母関数と言う

Cor (モーメント母関数とモーメント)

$\mu_j = E[X^j]$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$: j次モーメント

$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mu_j \quad \text{(テイラー展開)}$$

↑ $E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!} |X|^j\right] < \infty$ とする

と書ける。

$M(0) = 1, \quad M'(0) = \mu, \quad M''(0) = \mu_2, \ldots, M^{(k)}(0) = \mu_k$

⇒ Mを微分して$t=0$を代入すれば、k次モーメントが得られる。

注：e^{tX}は必ずしも積分可能ではない。

Def (特性関数)

t: パラメータ

X: r.v.

$$\phi(t) \overset{\text{def}}{=} E[e^{itX}] = E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)]$$

を特性関数 (characteristic function) と呼ぶ.

$|\phi(t)| \leqq 1$: 可積分

→ 任意の t に対して特性関数の値が確定する

Cor (特性関数とモーメント)

ある k (自然数) で $E[|X|^k] < \infty$ とする. ($\mu_k = E[X^k]$ が存在)

$$\phi^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{itX}] \quad (\phi \text{の} k \text{回微分})$$

$$\phi^{(k)}(0) = E[(iX)^k] = i^k \mu_k$$

よって. $\boxed{\mu_k = \dfrac{\phi^{(k)}(0)}{i^k}}$.

特に. $E[X] = \dfrac{\phi'(0)}{i}$

$$Var[X] = -\phi''(0) + \phi'(0)^2$$
$$(= \mu_2 - \mu_1^2)$$

//

※ 本当は積分と微分の交換には条件が必要だが. 上記の条件ではO.K.

(ある可積分な Z が存在して. $\left|\frac{\partial}{\partial t'} g(t', X)\Big|_{t'=t}\right| \leqq Z$ $(t_0 - \varepsilon \leqq t \leqq t_0 + \varepsilon)$ ← $\varepsilon > 0$

のとき. $\frac{\partial}{\partial t} E[g(t, X)]\Big|_{t=t_0} = E\left[\frac{\partial}{\partial t} g(t, X)\Big|_{t=t_0}\right]$ である.)

Cor (特性関数の性質)

(1) $\phi(0)=1$, $|\phi(t)| \leqq 1$, $\phi(-t)=\overline{\phi(t)}$

(2) $\overline{\phi(t)}$ は $-X$ の特性関数

(3) $\phi(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数 ← 優収束定理

(4) $Y=aX+b$ として, X と Y の特性関数を

$\phi_X(t)$, $\phi_Y(t)$ とすると.

$$\phi_Y(t) = E[e^{it(aX+b)}] = e^{itb}\phi_X(at)$$

Ex.（正規分布の特性関数）

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\exp(itx)\,dx$$

$$= \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$ ← コーシーの積分定理より

$$\phi'(t) = (i\mu - \sigma^2 t)\exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

$$\phi''(t) = -\sigma^2 \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) + (i\mu - \sigma^2 t)^2 \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

より.

$$\begin{cases} \phi'(0) = i\mu \\ \phi''(0) = -\sigma^2 - \mu^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E[X] = \dfrac{\phi'(0)}{i} = \mu \\ Var[X] = -(-\sigma^2 - \mu^2) - \mu^2 \\ \qquad = \sigma^2 \end{cases}$$

//

Ex.（二項分布）

$$f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

$$\phi(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx}\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(e^{it}\theta)^x(1-\theta)^{n-x}$$

$$= \left(e^{it}\theta + (1-\theta)\right)^n$$

$$\phi'(0) = n\theta i \Longrightarrow E[X] = \frac{\phi'(0)}{i} = n\theta$$

$$\phi''(0) = -\theta^2 n(n-1) - \theta n$$

$$\Longrightarrow Var[X] = -\phi''(0) + \phi'(0)^2$$

$$= \theta^2 n(n-1) + \theta n - (n\theta)^2$$

$$= n\theta(1-\theta)$$

//

<u>Def</u> (キュムラント母関数)

X: r.v. , $\phi(t)$: X の特性関数

$\psi(t) \overset{\text{def}}{=} \ln \phi(t)$ ($\ln$: 自然対数, $\log_e$)

を キュムラント母関数 と呼ぶ

$$\psi(t) = \ln \phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j$$

と展開した時、k_j を j 番目の キュムラント と呼ぶ

(j次キュムラント)

<u>Cor</u> (キュムラント母関数とキュムラントの関係)

$\forall s$: 自然数

$\psi^{(s)}(0) = i^s k_s$ より

$$k_s = \frac{\psi^{(s)}(0)}{i^s}$$

Cor (平均値まわりのモーメントとキュムラントの関係)

$$\psi(t) = \ln E[e^{itX}]$$

$$= \ln E[e^{it(X-\mu)+it\mu}]$$

$$= it\mu + \ln\Bigl(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(it)^j}{j!}\nu_j}_{=\,1+\underbrace{\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(it)^j}{j!}\nu_j}_{(*)}\ (\because \nu_1=0)}\Bigr) \qquad (\nu_j = E[(X-\mu)^j])$$

$$= it\mu + (*) - \frac{1}{2}(*)^2 + \frac{1}{3}(*)^3 + \cdots \quad \leftarrow \left(\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)$$

$$= it\mu + \frac{(it)^2}{2!}\nu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\nu_3 + \frac{(it)^4}{4!}\nu_4 + \frac{(it)^5}{5!}\nu_5 + \frac{(it)^6}{6!}\nu_6 + \cdots$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{(it)^4}{2!2!}\nu_2\nu_2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{(it)^5}{2!3!}\nu_2\nu_3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(it)^6}{3!3!}\nu_3\nu_3 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{(it)^6}{2!4!}\nu_2\nu_4 \cdots$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{(it)^6}{2!2!2!}\nu_2\nu_2\nu_2 + \cdots$$

$t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6$ の係数を比較すると.

$$\kappa_1 = \mu \qquad\qquad \kappa_4 = \nu_4 - 3\nu_2^2$$

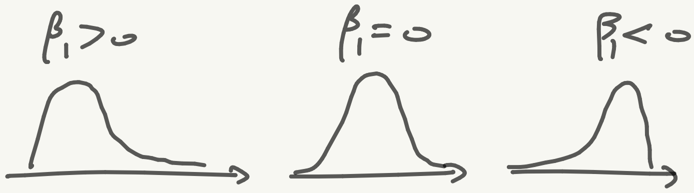
$$\kappa_2 = \nu_2 = \sigma^2 \qquad\qquad \kappa_5 = \nu_5 - 10\nu_2\nu_3$$

$$\kappa_3 = \nu_3 \qquad\qquad \kappa_6 = \nu_6 - 10\nu_3^2 - 15\nu_2\nu_4 + 30\nu_2^3$$

Def (歪みと尖り)

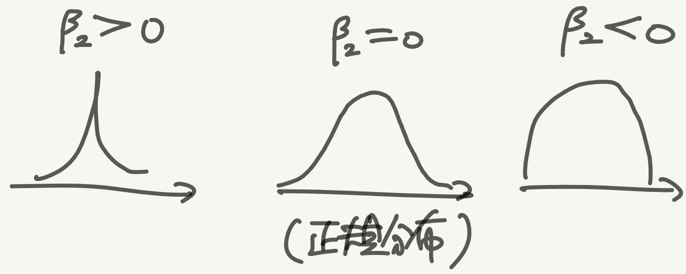
歪み (skewness)

$$\beta_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \frac{\nu_3}{\sigma^3}$$



尖り (kurtosis)

$$\beta_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = \frac{\nu_4 - 3\nu_2^2}{\sigma^4}$$



Ex. (正規分布の歪みと尖り)

$$\phi(t) = \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

$$\psi(t) = it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \nearrow \begin{cases} \psi'(t) = i\mu - \sigma^2 t \\ \psi''(t) = -\sigma^2 \\ \psi^{(k)}(t) = 0 \quad (k \geq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \mu \\ \kappa_2 = \sigma^2 \\ \kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_5 = \cdots = 0 \end{cases}$$

演習問題

ヒント: 優収束定理

(1) X_n: r.v. $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|] < \infty$ のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] = E[\sum_{n=1}^{\infty} X_n]$ を示せ.

(2) $P(0 \leq X < \infty) = 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} n E\left[\frac{1}{X} \mathbb{1}[X > n]\right] = 0$ を示せ.

(3) 優収束定理を用いて、本文中の微分と積分の交換可能性を示せ.

ヒント: $g(t,x)$ が $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ で偏1階微分可能なとき、

$0 < \forall h < \varepsilon$ で、$\exists \theta \in [0,1]$ で

$$\frac{g(t+h,x) - g(t,x)}{h} = \frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta h, x)$$

とできる。さらに $\left|\frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta h, x)\right| \leq Z$

を用いて、優収束定理を適用する.

(4) 一様分布の特性関数を求めよ.

特性関数を用いて平均と分散を求めよ.

(5) 正規分布の特性関数を導出せよ.

(6) p.d.f. が $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ で、ある分布の特性関数を求めよ.

(7) モーメント母関数が発散する例を示せ.

(8) 特性関数の連続性 ($\phi(t_n) \to \phi(t)$ if $t_n \to t$) を示せ.

ヒント: 優収束定理

(9). $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ が2乗可積分の時.

$X_1, \ldots, X_n$ を用いて X_{n+1} を線形予測する最小2乗解をもとめよ.

つまり、
$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i - X_{n+1}\right)^2\right]$$
を最小にする $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ を求めよ. (解は1つとは限らない)